

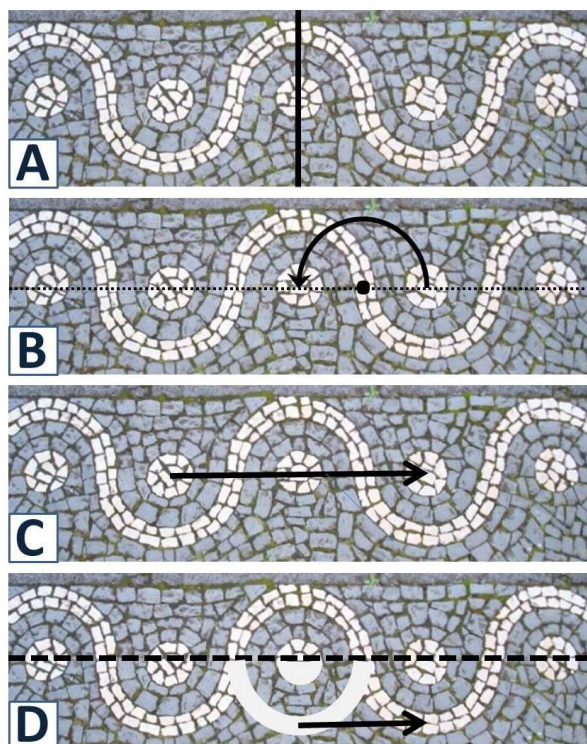
As simetrias que pode encontrar debaixo dos seus pés¹

Ricardo Cunha Teixeira

Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, rteixeira@uac.pt

Dada a azáfama da vida agitada a que estamos sujeitos, muitas vezes não nos apercebemos de pequenos pormenores do dia a dia, alguns deles mesmo debaixo dos nossos pés. É o caso de interessantes padrões decorativos que encontramos em praças e passeios embelezados pela tradicional calçada portuguesa. As suas cores mais comuns são o preto e o branco, resultantes do calcetamento com pedras de basalto e calcário, produzindo-se padrões muito ricos e diversificados. No artigo “The bad and the beautiful”, publicado no conceituado *Financial Times* em janeiro deste ano, Edwin Heathcote realça alguns aspetos que tornam as cidades mais sedutoras e elege as oito mais belas atrações citadinas a nível mundial. O autor coloca o impacto causado pelos padrões ondulantes da calçada do Rossio, em Lisboa, a par com outros “momentos belos” desencadeados, por exemplo, ao olhar para o grande canal de Veneza, para os apartamentos vitorianos de Nova Iorque ou para a iluminação noturna produzida pelos mercados de rua de Mongkok, em Hong Kong. Sem dúvida que vale a pena dedicar um pouco do seu tempo a apreciar a nossa bonita calçada, uma verdadeira atração mundial.

Um olhar atento pelos seus padrões constitui também uma excelente oportunidade para aprender Geometria, nomeadamente para perceber melhor o conceito de simetria. Mostro, em seguida, como num passeio da Rua de São João, na Ilha do Faial, se pode encontrar os quatro tipos de simetria.



¹ Artigo de divulgação publicado a 5 de abril de 2013, no jornal Tribuna das Ilhas, da Ilha do Faial.

Começemos pelo tipo mais conhecido: a *simetria de reflexão em reta*. Se o leitor colocar um espelho perpendicular à página do jornal, de modo a que a borda do espelho assente na reta vertical desenhada em A, verá que cada lado da imagem é, de facto, um reflexo do outro. Essa reta chama-se *eixo de simetria*. O leitor encontra facilmente outros eixos de simetria se tiver em conta que o mesmo padrão se repete indefinidamente para a direita e para a esquerda, para além do que é visível na fotografia (de facto, toda a reta vertical que corte um círculo em duas partes iguais é um eixo de simetria).

Existem também outros tipos de simetria, aparentemente menos perceptíveis. Em B, ilustra-se o conceito de *simetria de rotação*. Para tal, temos que fixar um ponto: o centro de rotação. Basicamente, a ideia é a de rodar a figura em torno do ponto fixo segundo um ângulo com uma determinada amplitude. Respeita-se, em geral, o sentido contrário aos ponteiros do relógio, designado por sentido positivo. Se, ao rodarmos a figura segundo uma amplitude inferior a 360° , ela coincidir com a sua posição inicial, dizemos que tem uma simetria de rotação: a figura inicial e a que resultou desse movimento ficam completamente sobrepostas, não se conseguem distinguir. Dizemos que o movimento em causa fixou globalmente a figura. Desafio o leitor a utilizar lápis e papel vegetal para reproduzir os contornos da calçada em B. Em seguida, sobreponha a figura desenhada à figura original, coloque o bico de uma caneta sobre o papel vegetal, no ponto marcado em B, e rode a folha de papel vegetal 180° em torno desse ponto (o correspondente a dois ângulos retos). Chegará à conclusão que a figura obtida fica completamente sobreposta à figura original. Estamos na presença de uma simetria de rotação de 180° , também conhecida por *meia-volta*. Se tivermos em conta que o padrão se repete indefinidamente e se escolhermos outros centros de rotação apropriados, encontraremos novas meias-voltas.

Existem mais dois tipos de simetria a ter em conta. Se, ao deslocarmos uma figura segundo um determinado vetor (caracterizado por uma direção, um sentido e um comprimento), ela ficar completamente sobreposta à figura inicial, dizemos que a figura tem uma *simetria de translação*. Como forma de ilustrar este conceito, utilize o esboço que fez em papel vegetal, sobreponha a figura desenhada à figura em C e arraste o papel vegetal sobre a folha de jornal segundo a direção, sentido e comprimento do vetor representado em C. No final deste processo, chegará à conclusão de que há uma sobreposição perfeita dos dois contornos. Vejamos o último tipo de simetria. Em D, está representada uma reta horizontal a tracejado. Um olhar atento permite concluir que essa reta não é um eixo de simetria da figura. Contudo, se o leitor imaginar que aplica uma reflexão à figura, seguida de uma translação (segundo um vetor paralelo à reta, com metade do comprimento do vetor representado em C), facilmente se apercebe que a figura obtida fica sobreposta à inicial. Dizemos que a figura tem uma *simetria de reflexão deslizante*.

Estão apresentados os quatro tipos de simetria e, tudo isso, tendo como ponto de partida um simples passeio em calçada! De facto, há muitos pormenores que passam despercebidos mesmo debaixo nos nossos pés. A partir de agora, de certo que o leitor estará mais atento...

Vagueando pelos passeios da cidade da Horta: roteiro de frisos²

Ricardo Cunha Teixeira

Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, rteixeira@uac.pt

Por estar associada à necessidade de contar, de calcular e de organizar o espaço e as formas, a Matemática é conhecida, em geral, como a ciência da quantidade e do espaço. No entanto, esta é uma definição redutora e incompleta, sobretudo tendo em conta a sua extraordinária evolução ao longo do último século e os muitos ramos que foram surgindo entretanto. Atualmente, “Matemática: a ciência dos padrões” é a definição que reúne maior consenso por parte da comunidade académica. O trabalho do matemático consiste, portanto, em encontrar, estudar e classificar todo o tipo de padrões. Esta tarefa, por vezes árdua, ajuda-nos a compreender melhor a realidade que nos rodeia.

Neste contexto, e regressando novamente ao tema explorado nos últimos artigos, proponho ao leitor que se transforme num verdadeiro detetive à caça de simetrias! A ideia é a de classificar, quanto aos tipos de simetria, os padrões geométricos que encontrar no seu caminho. Ao aceitar este desafio, perceberá melhor como funciona o trabalho de um matemático e a sua preocupação em organizar a informação “por prateleiras”, de acordo com determinados critérios estabelecidos previamente. Poderá também saborear o sentimento de harmonia das proporções e da procura por uma ordem, inerente ao conceito de simetria.

De forma a simplificar a tarefa que nos propomos concretizar, trataremos os exemplos de arte decorativa e ornamental que encontrarmos (pertencentes ao mundo a três dimensões) como se se tratassem de conjuntos de pontos do plano (a duas dimensões). Nas figuras estudadas, deverá haver pelo menos um motivo que se repita. É de realçar que não nos interessa propriamente se esse motivo é uma estrela, uma cobra, um desenho abstrato ou outra coisa qualquer, mas sim o modo como se processa essa repetição. Além disso, para facilitar a sua análise matemática, devemos-nos abstrair de pequenas imperfeições ou irregularidades e considerar apenas duas cores: a cor da figura e a cor de fundo.

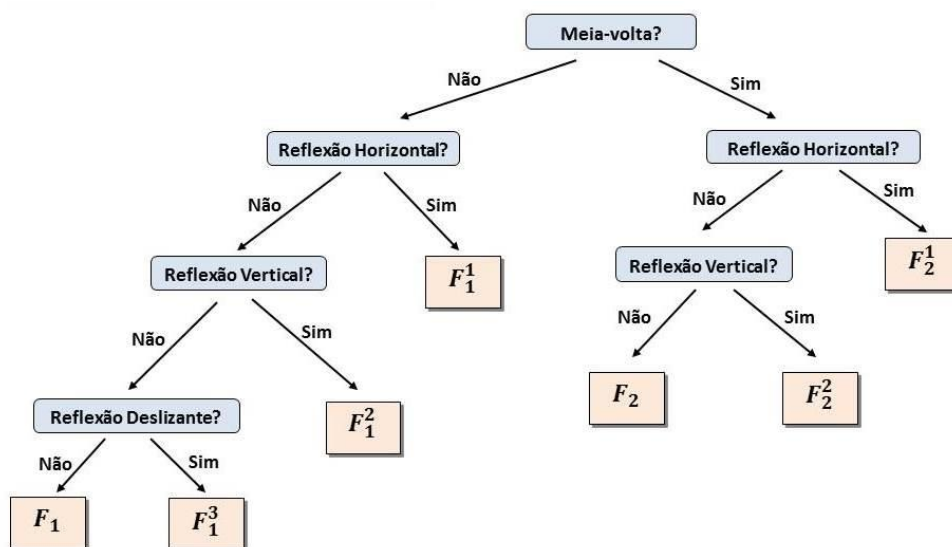
Neste artigo, vamos estudar as figuras que têm simetria de translação numa só direção, podendo ter ou não outros tipos de simetria. Essas figuras chamam-se *frisos*. O poder de síntese da Matemática volta aqui a estar em destaque, uma vez que se pode provar que existem apenas sete maneiras diferentes de repetir um determinado motivo ao longo de uma faixa, recorrendo aos quatro tipos de simetria (simetria de translação, simetria de rotação, simetria de reflexão em reta e simetria de reflexão deslizante).

Prova-se também que, a existir simetria de rotação, a sua amplitude terá de ser 180° : a chamada *meia-volta*. A razão é simples. Como o motivo se repete ao longo de uma faixa, segundo uma única direção, a aplicação de uma rotação com amplitude diferente de 180° teria

² Texto adaptado do artigo de divulgação publicado a 3 de maio de 2013, no jornal Tribuna das Ilhas, da Ilha do Faial.

como consequência deslocar o motivo numa direção diferente da pretendida, ou seja, para fora da faixa. Outra questão a ter em conta quando se classifica um friso tem a ver com a posição do mesmo. Para evitar confusões, é preferível estudá-lo “na horizontal”, ou seja, devemos considerar que o motivo se repete segundo uma faixa paralela ao chão. Desta forma, podemos falar, sem ambiguidade, em reflexões horizontais (quando o eixo de simetria tem a mesma direção da faixa) e em reflexões verticais (quando o eixo de simetria é perpendicular à faixa).

Posto isto, apresenta-se o fluxograma que permite classificar os frisos quanto ao seu grupo de simetria. Utiliza-se a notação de Fejes Tóth, por ser fácil de memorizar. Os sete grupos de simetria são representados pela letra F. Quando há meia-volta coloca-se 2 em índice, caso contrário coloca-se 1. Em expoente, coloca-se 1 (quando há reflexão horizontal), 2 (quando há reflexão vertical) ou 3 (quando há reflexão deslizante). A ausência de um expoente indica que não existem simetrias de reflexão em reta, nem de reflexão deslizante.



Apresento ao leitor um roteiro de frisos, que o desafia a percorrer as ruas da cidade da Horta com um novo olhar. O fluxograma será uma boa ajuda na classificação dos grupos de simetria. Quando chegar a casa, não o largue. Procure antes mais exemplos de frisos em toalhas, rendas, tapetes e azulejos e utilize-o para os classificar. Alerto apenas para o perigo de poder ficar viciado em frisos!

Como vimos, os frisos apresentam simetria de translação numa única direção. Existem também figuras com simetria de translação em mais de uma direção, o que tem como consequência a pavimentação de todo o plano. Prova-se que existem apenas 17 maneiras diferentes de produzir padrões com estes requisitos.

Para um maior aprofundamento deste tema, o leitor poderá consultar o livro *Simetria e Transformações Geométricas*, de Eduardo Veloso (2012), a brochura *Geometria e Medida no Ensino Básico*, de Ana Breda *et al.* (2011), ou o site da Associação Atractor, www.atorator.pt.

Roteiro de Frisos da Cidade da Horta

Ricardo Cunha Teixeira

